SIMETRIAS NO PLANO E SUAS APLICAÇÕES (Segunda parte)

Luiz Antônio Freire

.

"Simetrias no Plano e Suas
Aplicações"
(Segunda Parte)
páginas:
1→28
5.0
5.1
5.2
7
7½
11.1
11.2
12.0
12.1
12.2

Índice (2ª parte)

(0)

Referências

– "Fantasy & symmetry" de Caroline MacGillavry.
– "The Fascination of Groups" Budden.

.

①

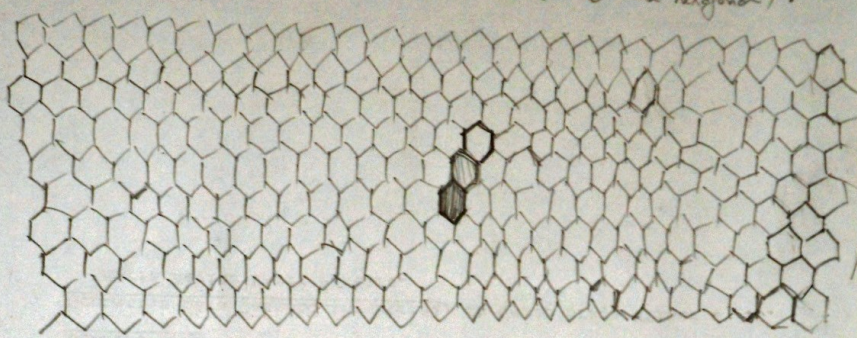
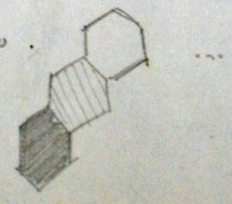
§ 21. Introdução (da Segunda Parte)

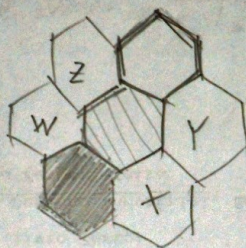
Os vinte primeiros parágrafos desta apostila foram escritos durante um curso de "Matemática para as Artes" no segundo semestre de 1983 na PUC-Rio.

Durante este mesmo curso, (agora porém no segundo semestre de 1984), senti necessidade de acrescentar alguns exercícios e de ampliar a teoria.

Neste suplemento, decidi reconstruir (juntamente com o leitor) um novo painel de Maurits Escher (Plate 27 do livro "Fantasy & Symmetry" de Caroline H. Macgillavry), pois tal tarefa constitue um ótimo exercício para quem lida (direta ou indiretamente) com Teoria dos Grupos

(2)

§22 . O problema da Distribuição de Cores (numa rêde hexagonal).

Considere um célula qualquer.
Pinte-a de preto.
Considere uma célula vizinha (adjacente) que possua um lado comum com a célula anterior:
Pinte-a de cinza.
(Representaremos o cinza por)
Finalmente, pinte a seguinte de branco. ...

(3)

Suponha que não seja possível pintar duas regiões adjacentes utilizando uma cor única. Então quais deveriam ser as cores das regiões X, Y, Z e W ?

Obviamente o azulejo X terá que ser branco, pois caso contrário sua cor coincidiria com a de um de seus vizinhos já pintados.

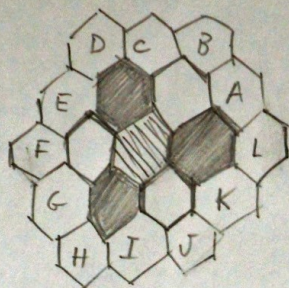
Analogamente:

Y deverá ser ....

Z " " ....

W " ....

(4)

Continuando com a distribuição das cores,

A teria que ser _ _ _ _ _ _ _

B " " " _ _ _ _ _ _ _

C " " " _ _ _ _ _ _ _

D " " " _ _ _ _ _ _ _

E " " " _ _ _ _ _ _ _

F " " " _ _ _ _ _ _ _

G " " " _ _ _ _ _ _ _

H " " " _ _ _ _ _ _

I " " " _ _ _ _ _ _

J " " " _ _ _ _ _ _ _

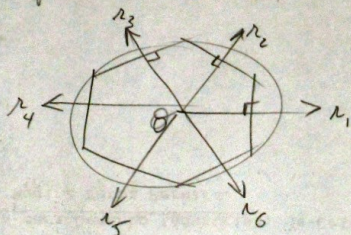
K " " " _ _ _ _ _ _

L " " " _ _ _ _ _ _ _

(5)
ZERO/DOIS

Suponha que estejamos diante de um painel deste Tipo, cujas distribuição de cor já tenha sido definida segundo a regra acima exposta.

Selecione uma célula qualquer nesta rêde.

Suponha que ela tenha (por exemplo) a cor cinza.

Tal célula gera 6 semi-retas a partir do ponto central O. Digamos r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 e r_6.

Os pares r_1 e r_4 formam uma única reta (digamos r_{14})

" " r_2 e r_5 formam outra reta (digamos r_{25})

" " r_3 e r_6 " " " (" r_{36}).

Observação:

$r_2 = r_1^{Rot(+60°)}$

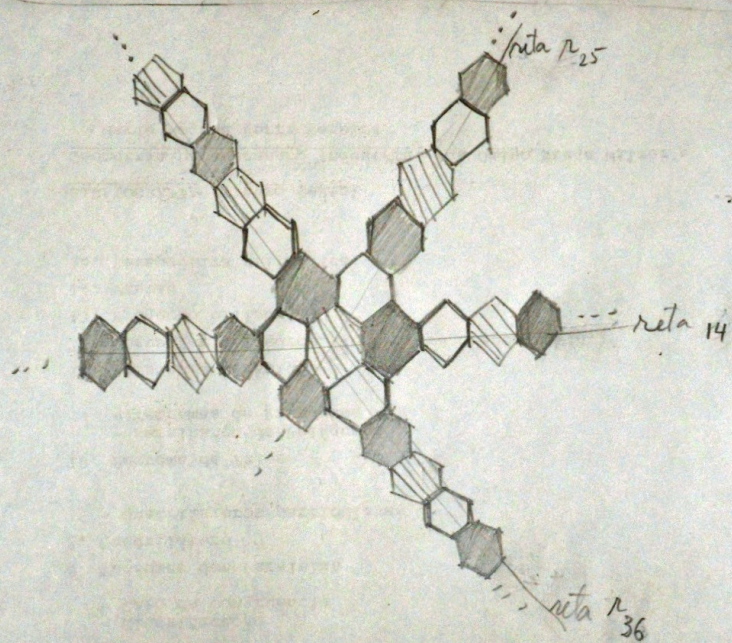
$r_3 = r_2^{Rot(+60°)}$

$r_4 = r_1^{Rot(+180°)}$

$r_5 = r_1^{Rot(+240°)} = r_1^{Rot(-120°)}$

Uma vez definida a célula original (suponha cinza), ela passa a gerar retas que por sua vez definirão uma seqüência de células adjacentes e alinhadas.

Seqüências estas que estarão definidas segundo as direções rn_{14}, rn_{25} e rn_{36}

Ao escolher aleatoriamente um destes eixos, nota-se que os hexágonos se apresentam segundo a ordem Cinza, Branco, Preto, Cinza, Branco, Preto etc

7
5
DOIS
DOIS
reta r25
reta 14
reta r36

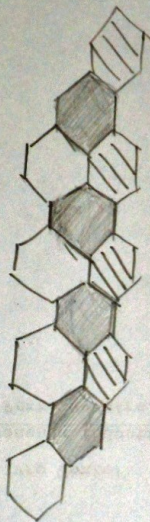
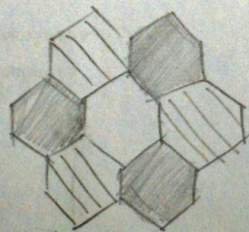
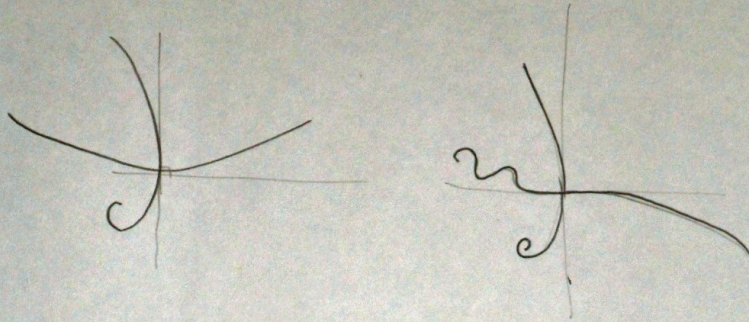
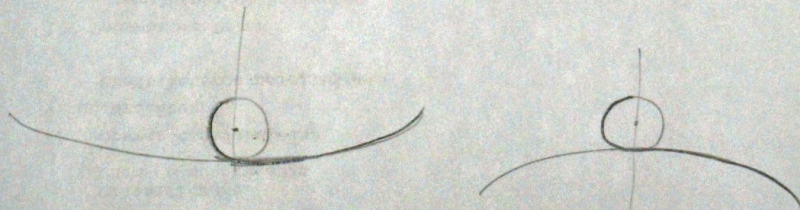
.

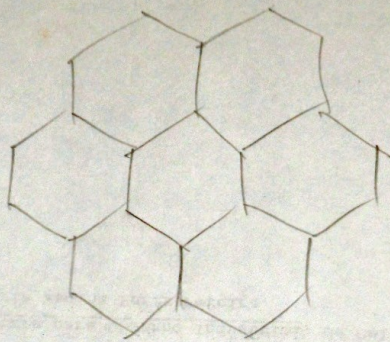
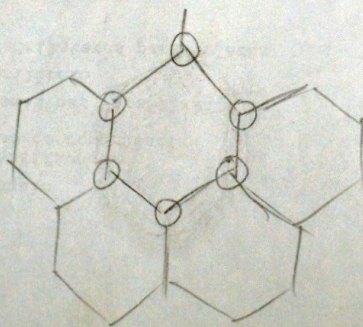
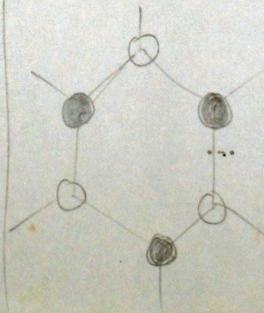
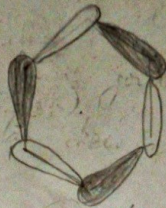
Supondo que a reta r_{14} seja considerada "horizontal", uma reta "vertical" poderia ser obtida, traçando-se a bissetriz das retas r_{25} e r_{36}. Como se apresentaria tal seqüência vertical passando por nossa célula original cinza ?

Analogamente as seqüências verticais – pretas apresentam-se de modo semelhante ao exposto acima.

Idem para as brancas.

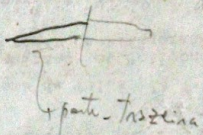
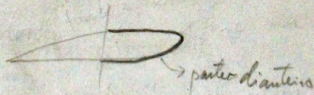
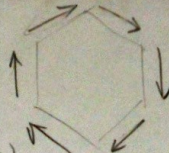
(9) (7)/75

Se encaixarmos três destas sequências -verticais- consecutivas, lado-a-lado, obtemos

Observe finalmente que se uma célula é digamos branca, todas as que a rodeiam serão forçosamente cinzas e pretas formando uma espécie de anél de cinzas e pretas alternadamente.

23.
Curvas Perpendiculares, Curvas Concordantes.
Duas curvas são perpendiculares num ponto X se as tangentes a cada curva (em X) forem perpendiculares.
Duas curvas são concordantes (em X) se as duas tangentes (em X) forem coincidentes.

24. Construindo sobre os hexágonos. (11) (8)

Considere uma rede hexagonal sem cor.

Selecione uma célula qualquer central (original).
Sobre cada um de seus vértices, construa pequenas bolas.

Pinte as bolas de preto e branco alternadamente

Deforme cada bola em regiões segundo a (12) (9)
ilustração abaixo

Denominaremos cada uma destas regiões de "pranchas" e convencionaremos estarem orientadas no sentido horário, ou seja: a parte dianteira da prancha será (por convenção) a parte mais gorda; a parte traseira será a parte mais fina.

→ parte dianteira

→ parte traseira

~~Podemos agora utilizar tais termos pois temos uma orientação pré-estabelecida (no caso o sentido horário)~~

(13)

Uma vez definida a orientação (no caso, o sentido horário) podemos dizer que a prancha x antecede a prancha y.

x y z w

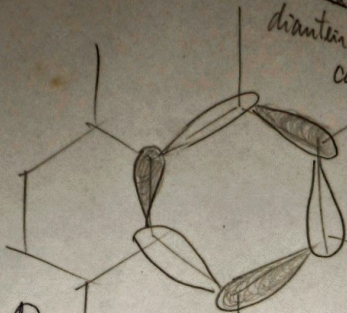
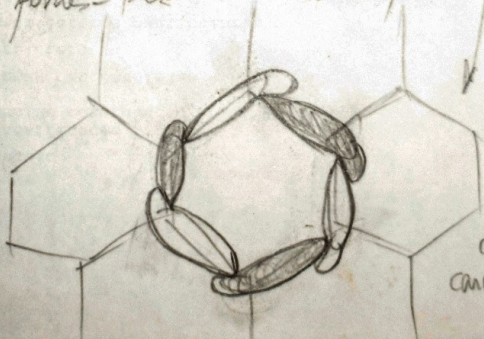
ou que a prancha z é posterior à prancha w

(14) (10)

25. Construção dos bicos:

Tínhamos

Imaginando serem as pranchas feitas de borracha,

Deforme contínua e lentamente cada uma de modo que suas partes-dianteiras se transformem em cabeças que vão avançando sobre a prancha seguinte,

Prolongue cada parte-dianteira de modo a apoiá-se sobre a prancha seguinte ( ), como se a prancha seguinte servisse de travesseiro. (Não se esqueça de alongar ao máximo as partes-traseiras de cada prancha)

... figura ...

até que se tornem bicos com as seguintes características:

15 11 UM/DEZ

Construa um bico preto, apoiando-o perpendicularmente ao corpo branco seguinte. (A ponta do bico preto recém-criada, deverá pousar no centro do hexágono adjacente ao central, conforme a ilustração).

Observação UM

As curvas AB e CD devem ser perpendiculares.

(Este fato é essencial para a construção dos bicos).

Construir os cinco outros bicos.

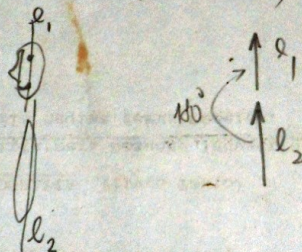
.

Observação-~~[illegible]~~:

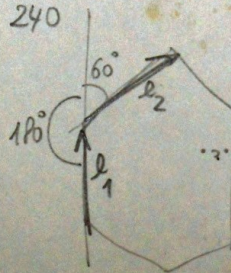
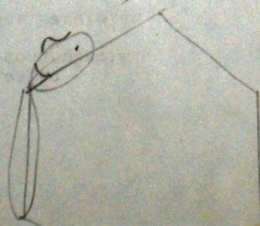
16

(11) 2013/2013

Repare que se uma pessoa está em pé de modo que o eixo (e_1) vertical da cabeça seja paralelo ao eixo (e_2) (também vertical) de seu corpo (ou coluna), temos:

(ângulo entre e_1 e e_2) = 180°

Mas se ela resolve apoiar sua cabeça sobre uma das faces de um prisma hexagonal regular, enquanto seu corpo está apoiado sobre a face adjacente, temos:

(ângulo entre e_1 e e_2) = 180° + 60° = 240°

Continue os [illegible]

(old new page) 16.1

(12) ZERO/DOIS

As Medianas

26. Definindo uma orientação para a rotação.

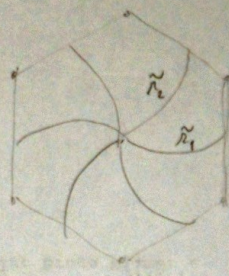
Considere um hexágono com arestas (lados) a_1 a_2 a_3 . . .

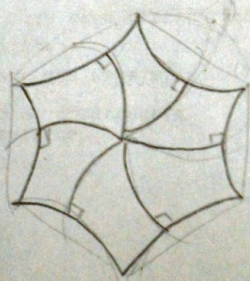
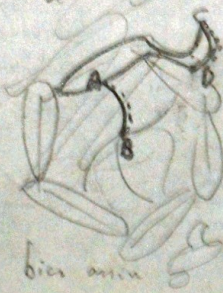
Deforme suas arestas sem movimentar os vértices, transformando-as nas respectivas curvas correspondentes $\tilde{a}_1$ $\tilde{a}_2$ $\tilde{a}_3$ . . .
conforme a ilustração seguinte:

Considere as seis semi-retas r_1, r_2 r_3 r_4 r_5 e r_6.
Todas passam pelo centro e são perpendiculares às respectivas arestas a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6.

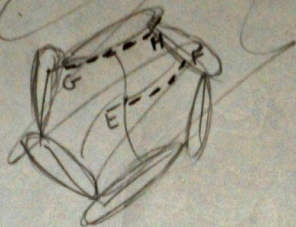
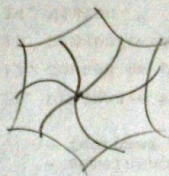
. . .

(17) (12) UM/DOIS

Aplique um "sopro" horário sobre os raios r_j de modo a curvá-los (todos no sentido horário), chamando-os respectivamente de $\tilde{r}_1$ $\tilde{r}_2$ $\tilde{r}_3$ . . . .

Seria interessante manter cada curva $\tilde{r}_j$ perpendicularmente a sua respectiva curva $\tilde{a}_j$.

Isto sugere que se adote $\tilde{a}_j$, ao invés de a_j, obtendo

(18) Observação: O sopro foi escolhido no sentido horário pois as cabeças das pranchas se [illegible] também no sentido horário até se tornarem bicos (vide a palavra "seguinte" no parágrafo relativo à construção dos bicos).

19 13

Ou, se preferir, a curva EF, segue aproximadamente a concavidade da curva GH.

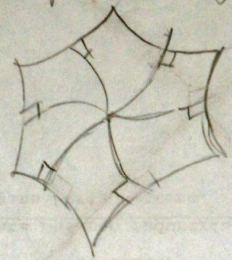
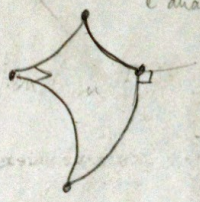
G H F E

Obs: Ao traçar estas seis curvas deve-se tomar o cuidado para que nenhuma delas quebre a concavidade natural dada pela rotação.

sim ; nunca,

pois a curva pontilhada estaria em desarmonia com a orientação (horária) dada pelo ~~demais cinco curvas~~ sopro.

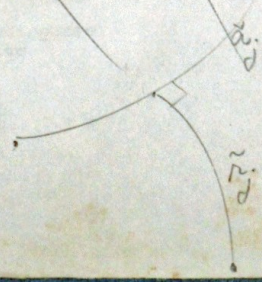
...

(20)

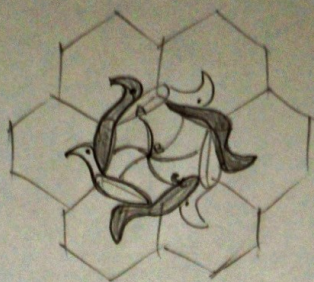
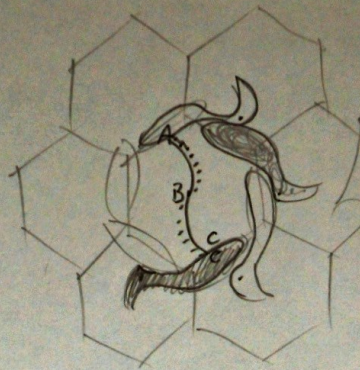
É bom lembrar que tais curvas devem ser construídas perpendicularmente às curvas internas (de cada prancha

e que cada gravata é constituída de quatro vértices ligados por ~~justamente com as~~ quatro "curvas-arestas" (~~curvas arestas~~).

→ duas "curvas-arestas" e duas " " "curvas-raios"

Recordar também que cada raio $\tilde{r}_j$ corta a respectiva aresta $\tilde{a}_j$ aproximadamente no ponto médio.

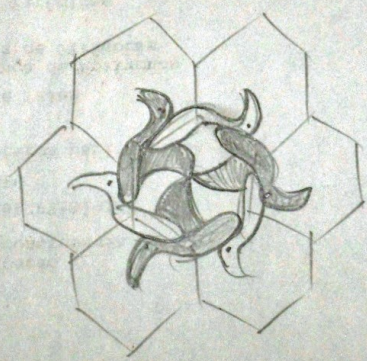
$\tilde{a}_j$

$\tilde{r}_j$

28. Distribuição de cores às gravatas.

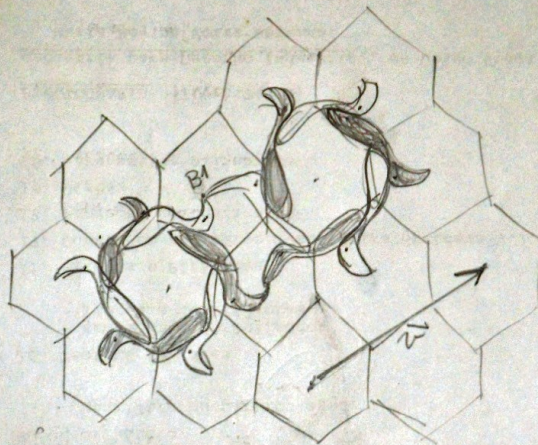
Estávamos na situação:

(21) 15

Observe que as curvas AB e BC concordam em B e possuem concavidades opostas. Além disso, o "~~caminho~~" ABC liga pontos diametralmente opostos ~~um corpo branco a um corpo preto~~, um pertencente a uma corpo branco, enquanto que o outro pertinente a um corpo preto.

(22) (16)

Idem para os outros dois caminhos análogos.

Para distribuir as respectivas cores às gravatas, basta seguir o processo natural de construção de pássaros, pois já temos o corpo, o bico e, neste momento, uma das asas. (observação: no caso o termo "asa" seria sinônimo ao nosso antigo termo "gravata")

29. O chute:

(24) (17)

Se dermos um chute em toda a estrutura existente de modo a aplicar uma rotação de (+120°) em torno de um dos bicos brancos, (digamos o bico branco-um (B1)), obtemos:

Se não fizermos distinções entre dois pássaros brancos quaisquer, será possível considerar tal movimento como equivalente a uma translação segundo o vetor $\vec{v}$.

Chame a antiga "bola" (antes de ser chutada) de estrutura-um (E1) e a nova de estrutura-dois (E2).

Neste caso,

$$(E2) = (E1)^{Rot(+120°;\, B1)}$$

Se considerarmos todos os pássaros brancos como representantes de uma única classe de equivalência,

$$(E2) = (E1)^{T_{\vec{v}}}$$

Observação: É bom lembrar três itens:

① Rot (+120°; B1) representa a função "Rotação de (+120°) em torno do ponto B1".

~~Observação: Quaisquer dúvidas quanto à notação, vide parágrafos relativos à função-translação e função-rotação.~~

② $T_{\vec{v}}$ representa a função "Translação segundo o vetor $\vec{v}$".

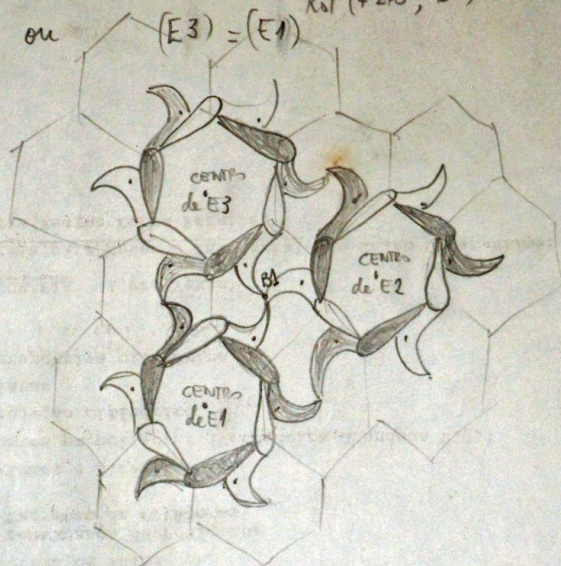
③ $\square = \star^{f}$ significa (neste texto) que ... o quadrado é a imagem da estrela segundo a função f.

30 . Continuando com os chutes.

(26) (19)

Aplique (sobre a estrutura-dois (E2)) uma nova rotação de (+120°) em torno do ponto B1, obtendo uma terceira estrutura (E3).

$(E3) = (E2^{Rot(+120°; B1)}$

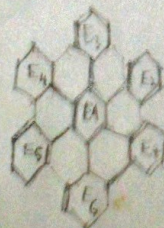
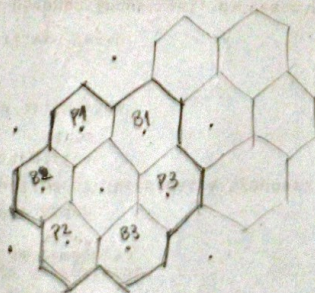
ou $(E3) = (E1)^{Rot(+240°; B1)}$

Construa (E4), (E5), (E6) e (E7) de modo que

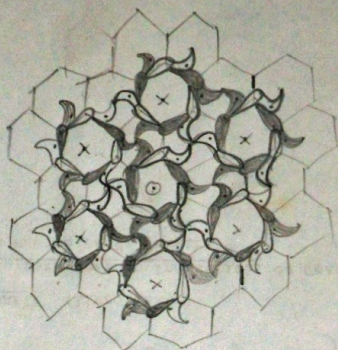
$$(E4) = (E3)^{Rot(+120°;\, P1)}$$

$$(E5) = (E4)^{Rot(+120°;\, B2)}$$

$$(E6) = (E5)^{Rot(+120°;\, P2)}$$

$$(E7) = (E6)^{Rot(+120°;\, B3)}$$

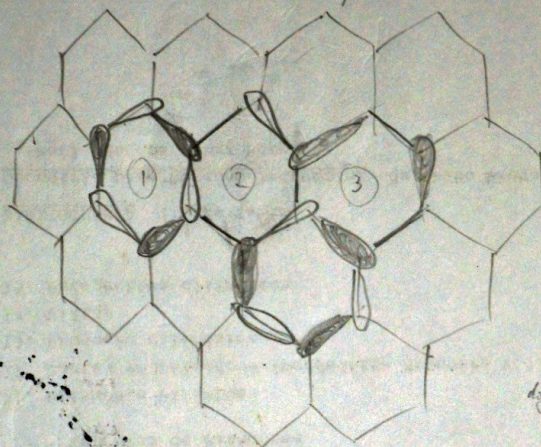
onde os pontos P1, B2, P2 e B3 estão ~~indicados~~ definidos na seguinte figura:

31. Colocação do azulejo "gravatinhas". (21) (28)

Estávamos na seguinte situação:

No final do parágrafo 27, vimos que cada estrutura envolvia seis regiões internas que apelidamos de "gravatinhas":

.

Preencha o interior de cada estrutura E_j.

32. Alguns Comentários:

Observe que se considerarmos apenas as pranchas, teremos uma rede do tipo

Observação: Existem 3 tipos de "azulejos" hexagonais

observe que essa aresta não é prancha (nem branca nem preta) (apenas uma aresta... digamos... neutra)

Chame cada região envolvida por seis pranchas (três brancas e três pretas) de "Gravatinha". (G)

(Em outras palavras: A "Gravatinha" (no singular) G é o que havíamos chamado de "azulejo (1)")

Chame cada região envolvida apenas por 3 pranchas brancas de "Bico Preto". (BP) (o antigo "azulejo (3)")...

Chame cada região envolvida apenas por 3 pranchas pretas de "Bico Branco". (BB)

(o antigo "azulejo (2)")

Verifique no seu desenho que, de fato, temos:

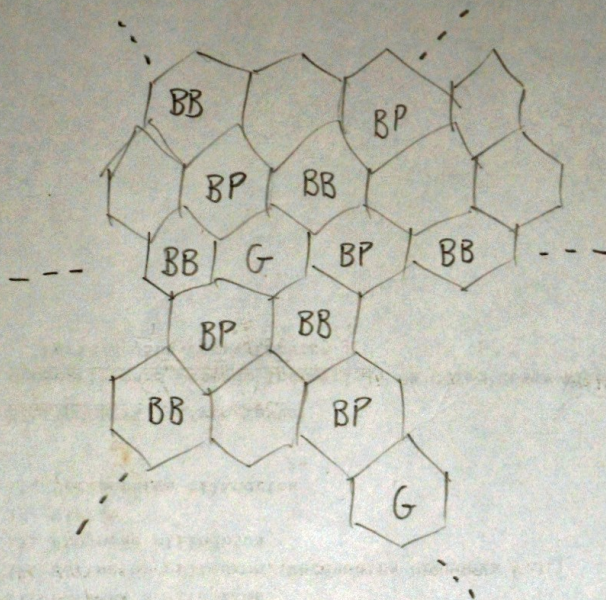
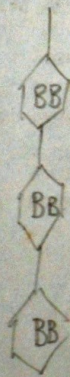
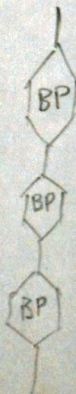
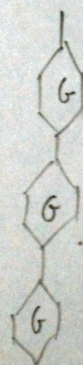
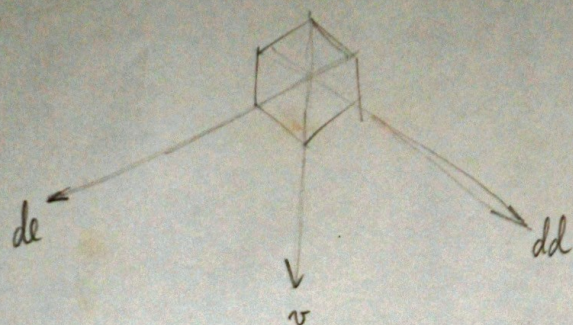
Verificar também:

24

31

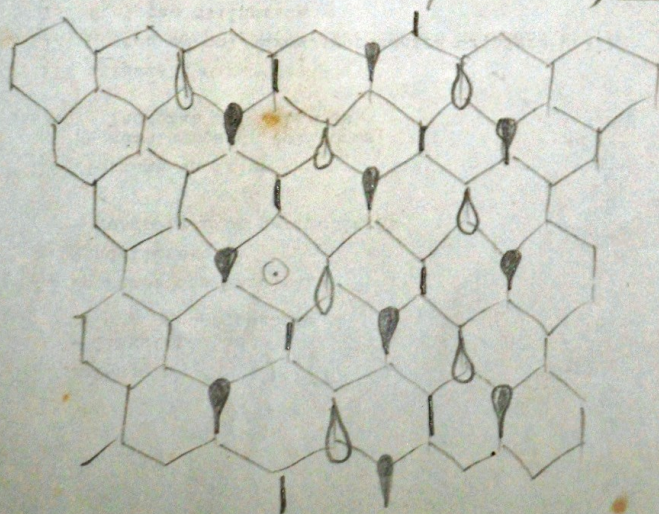
de

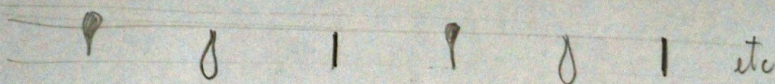
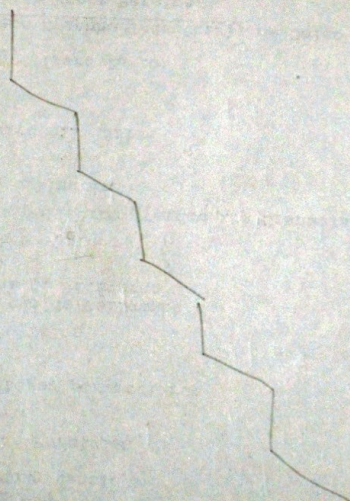
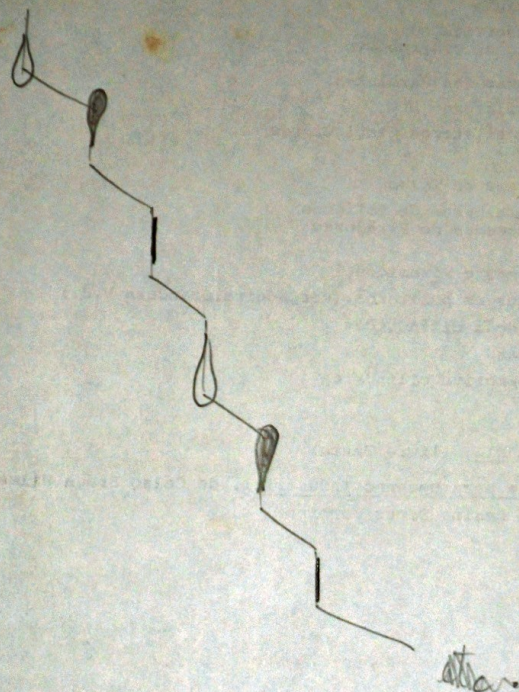
dd

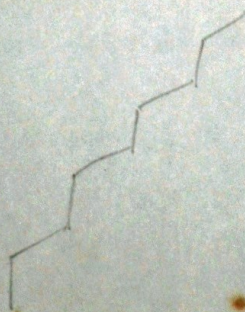
v

As observações ①, ② e ③ referem-se à direção v.
Observações análogas poderão ser feitas relatívas às direções dd e de.

—//—

Considerando apenas as pranchas verticais,

32 25

concluímos que as sequências verticais apresentam apenas um símbolo, enquanto que as ~~sequências~~ horizontais apresentam todos os tres símbolos, num ciclo ordenado.

etc

Se percorrermos o caminho

(é bom lembrar que estamos considerando apenas as pranchas-verticais)

Encontrarhmos novamente a sequencia
26
33
altar.
Idem para o caminho

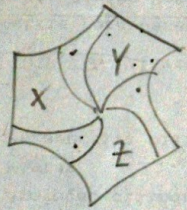
(27)

Analize agora uma sequência de pranchas (34) no longo ~~apontando~~ da direção dd.

Idem para as pranchas ~~ao longo de~~ sobre de.

— // —

33. Pintando as últimas regiões de preto.

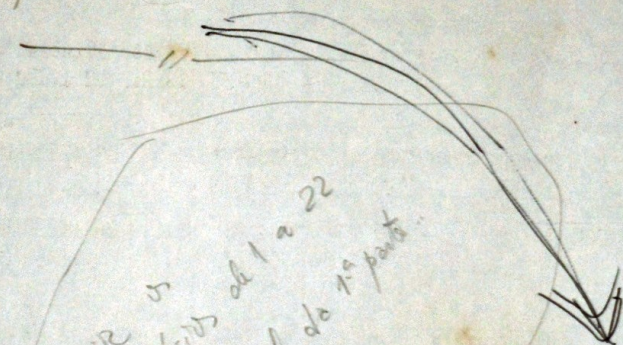
Considere uma célula BB (bico branco)

X Y Z

Pinte as regiões X, Y e Z de preto.

Repita a operação para todas as outras células BB.

33. Conclusão da 2ª parte:

Não há muito o que concluir, pois nossa conversa girou em torno de um caso muito específico.

Por outro lado, o exercício desenvolve a análise dos diferentes tipos de isometrias existentes num painel.

INCLUIR os EXERCÍCIOS de 1 a 22 no final do 1ª parte.

REFERENCIAS (vide índice)